Aula 12

Equações Diferenciais Ordinárias Escalares Lineares de 1ª Ordem

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x + b(t),$$

com $a, b : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínuas em I.

Equações Diferenciais Ordinárias Escalares Lineares de 1ª Ordem **homogéneas**

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x,$$

com $a : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua em I.

A solução geral de uma equação diferencial ordinária, escalar de primeira ordem, linear e homogénea

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x,$$

com $a : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua num intervalo $I \subset \mathbb{R}$, é dada por

$$x(t) = C\, e^{\int a(t)dt},$$

em que $C \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária.

A solução do problema de Cauchy, com condição inicial $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}$ em $t_0 \in I$, é dada por

$$x(t) = x_0\, e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}.$$

Teorema: Dada uma equação diferencial ordinária, escalar de primeira ordem, linear

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x + b(t),$$

com $a, b : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínuas num intervalo $I \subset \mathbb{R}$, a solução geral é dada por

$$x(t) = \frac{C}{\mu(t)} + \frac{1}{\mu(t)} \int \mu(t)b(t)dt,$$

em que $C \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária e um factor integrante $\mu(t) = e^{-\int a(t)dt}$.
A solução do problema de Cauchy, com condição inicial $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}$ é dada por

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \frac{\mu(t_0)}{\mu(t)} + \frac{1}{\mu(t)} \int_{t_0}^{t} \mu(s)b(s)ds \\ &= x_0\, e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} + \int_{t_0}^{t} e^{\int_s^t a(r)dr} b(s)ds. \end{aligned}$$